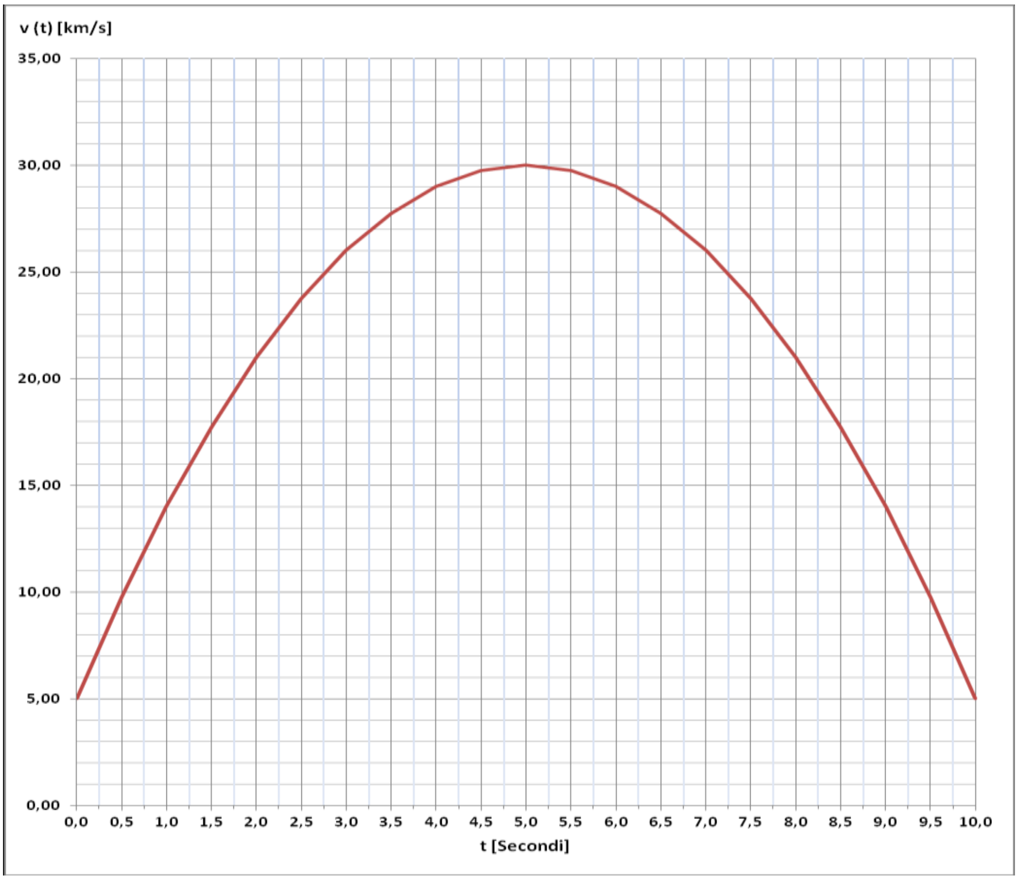
Problemi di simulazione della seconda prova di matematica
Esami di stato liceo scientifico 25 febbraio 2015
Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta
Tempo massimo assegnato alla prove tre ore

Problema 1: **Una collisione tra meteoriti**

Marco e Luca, durante la visita guidata ad un museo scientifico interattivo, osservano su un monitor la simulazione della collisione tra due meteoriti, effettuata da un videogioco. Sul monitor sono rappresentate la traiettoria del primo meteorite e il grafico della sua velocità in funzione del tempo, mostrato in figura.



In base alle loro conoscenze di matematica, discutono sul tipo di curva geometrica rappresentata dal grafico e cercano di determinarne l'equazione, necessaria per procedere nella simulazione.

1. Aiuta Marco e Luca a determinare l'equazione che rappresenta la curva, spiegando il procedimento seguito.

Svolgimento.

$$v = v(t) = -t^2 + 10t + 5 \quad t \geq 0$$

parabola per i tre punti $P_1 = (0,5)$ $P_2 = (5,30)$ $P_3 = (10,5)$

oppure

parabola di vertice $V = (5,30)$ e passante per $P = (0,5)$.

Dopo che Marco e Luca hanno scritto sul terminale l'equazione trovata, il videogioco si complimenta con loro e sul monitor appare la seguente espressione:

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t \quad \text{con} \quad t \geq 0$$

Viene quindi chiesto loro di verificare se la funzione data rappresenta lo spazio percorso dal meteorite in funzione del tempo (legge oraria del moto).

2. Aiuta Marco e Luca a verificare che la funzione apparsa sul monitor rappresenta la legge oraria del moto, spiegando il procedimento seguito.

Svolgimento. La legge oraria del moto è

$$s'(t) = v(t) \qquad t \geq 0$$

Per rispondere al quesito è sufficiente verificare che le due funzioni $v(t) = -t^2 + 10t + 5$ e

$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ soddisfano tale relazione.

Essendo $s'(t) = -\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}t^2 + 2 \cdot 5t + 5$, la relazione è verifica.

N.B. In alternativa si può osservare che la legge oraria del moto equivale alla relazione (forma integrale della legge)

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$$

Essendo $t_0 = 0$ e posto $s(0) = 0$, si ottiene

$$s(t) - s(0) = \int_0^t \left(-s^2 + 10s + 5\right) ds \quad \Rightarrow \quad s(t) = \left[-\frac{1}{3}s^3 + 5s^2 + 5s\right]_0^t = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t \quad t \geq 0$$

che risponde affermativamente al quesito.

A questo punto sul monitor appare un secondo meteorite, la cui traiettoria interseca quella del primo meteorite in un punto P. Il videogioco chiede quale condizione deve essere verificata affinché avvenga l'urto.

3. Aiuta Marco e Luca a rispondere in modo qualitativo.

Svolgimento. Condizione necessaria e sufficiente affinché avvenga l'impatto fra due corpi in movimento è la simultaneità nel tempo e nello spazio ovvero i due corpi si trovino nello stesso istante in un punto comune alle due traiettorie. Precisamente, denotate con

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_2(t) \\ y_2 = y_2(t) \end{cases} \qquad t \geq 0$$

le rispettive posizioni (in coordinate parametriche) dei due corpi nel tempo, gli eventuali punti di impatto sono determinati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) \\ y_1(t) = y_2(t) \\ t \geq 0 \end{cases}$$

Ciascuna soluzione (t_0, x_0, y_0) sarà costituita dall'istante t_0 dell'impatto e dal punto $P = (x_0, y_0)$ ove tale evento si verifica.

Marco e Luca rispondono correttamente e il primo meteorite viene colpito dal secondo e devia dalla traiettoria originaria modificando il suo moto. Dopo l'urto il monitor indica che il primo meteorite si muove ora con la nuova legge oraria:

$$s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t$$

Il videogioco chiede quindi di determinare il tempo t_{urto} in cui è avvenuto l'urto.

Aiuta Marco e Luca a:

4. determinare il tempo t urto;

Svolgimento. Alla luce di quanto visto nel punto precedente, per determinare il tempo t urto dobbiamo innanzitutto calcolare le soluzioni dell'equazione

$$-\frac{1}{3}t^3+5t^2+5t=2t^2+\frac{5}{3}t \quad \Rightarrow \quad t\left(-\frac{1}{3}t^2+3t+\frac{10}{3}\right)=0$$

Osservato che l'equazione ammette tre soluzioni reali:

$$t_1=0, \quad t_2=-1, \quad t_3=10$$

si può facilmente dedurre che

$$t_{urto}=10 \text{ secondi.}$$

5. studiare la legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e 3·t urto secondi, evidenziando la presenza di eventuali punti di discontinuità e/o di non derivabilità e tracciandone il grafico.

Svolgimento. Si tratta di studiare la funzione

$$s(t)=\begin{cases}-\frac{1}{3}t^3+5t^2+5t & 0\le t\le 10\\ 2t^2+\frac{5}{3}t & 10<t\le 30\end{cases}$$

<u>Continuità</u>. la funzione è continua almeno in tutti i punti diversi da $t=10$. Essendo

$$s(10)=\frac{650}{3}=\lim_{t\to 10^+}s(t)=\lim_{t\to 10^+}\left(2t^2+\frac{5}{3}t\right)$$

la funzione è continua anche in $t=10$.

<u>Derivabilità</u>. La funzione è derivabile in tutti i punti del dominio, tranne eventualmente $t=10$, e risulta

$$s'(t)=\begin{cases}-t^2+10t+5 & 0\le t<10\\ 4t+\frac{5}{3} & 10<t\le 30\end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in $t=10$ occorre discutere il limite del rapporto incrementale in tale punto:

- derivata sinistra in $t=10$

$$s'_-(10)=\lim_{t\to 10^-}\frac{-\frac{1}{3}t^3+5t^2+5t-\frac{650}{3}}{t-10}=\frac{1}{3}\lim_{t\to 10^-}\frac{-t^3+15t^2+15t-650}{t-10}=\frac{1}{3}\lim_{t\to 10^-}\left(-t^2+5t+65\right)=5$$

- derivata destra in $t=10$

$$s'_+(10)=\lim_{t\to 10^+}\frac{2t^2+\frac{5}{3}t-\frac{650}{3}}{t-10}=\frac{1}{3}\lim_{t\to 10^+}(6t+65)=\frac{125}{3}$$

Si deduce quindi che la funzione non è derivabile in $t=10$.

Passiamo a determinare l'equazione delle rette tangenti (destra e sinistra) nel punto

- equazione tangente sinistra: $y-s(10)=s_-^{'}(10)(t-10) \quad \Rightarrow \quad y=5t+\frac{500}{3}$

- equazione tangente destra: $y-s(10)=s_+^{'}(10)(t-10) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{125}{3}t-200$

N.B. Osservato che la funzione è continua in $t=10$ e derivabile in tutti gli altri punti, avremmo potuto determinare la derivata destra e sinistra in $t=10$ calcolando i limiti[1]

$$s_-^{'}(10)=\lim_{t\to 10^-} s'(t)=\lim_{t\to 10^-}\left(-t^2+10t+5\right)=5 \qquad s_+^{'}(10)=\lim_{t\to 10^+} s'(t)=\lim_{t\to 10^+}\left(4t+\frac{5}{3}\right)=\frac{125}{3}$$

Massimi/minimi. Si prova facilmente che $s'(t)>0$ per ogni $t\in[0,30]-\{10\}$, quindi la funzione è crescente. Di conseguenza il minimo è assunto nell'estremo sinistro $t=0$, mentre il massimo è assunto nell'estremo destro $t=30$

$$\min s = s(0)=0 \qquad \max s = s(30)=1850\,.$$

Derivata seconda. Ovviamente la funzione ammette derivata seconda in $[0,30]-\{10\}$ e risulta

$$s''(t)=\begin{cases}-2t+10 & 0\le t<10\\ 4 & 10<t\le 30\end{cases}$$

Flessi. Studiamo il segno della derivata seconda:

$$s''(t)>0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-2t+10\\ 0\le t<1\end{cases} \quad\vee\quad 10<t\le 30 \quad\Rightarrow\quad 0\le t<5 \quad\vee\quad 10<t\le 30$$

La funzione è pertanto convessa in $[0,5]\cup[10,30]$ e concava altrove, di conseguenza $t=5$ è un flesso ascendente.

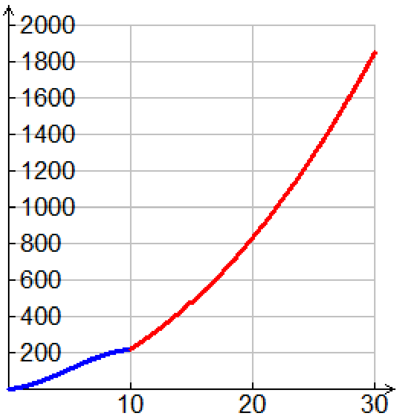
Grafico. (N.B. retta tangente nell'origine $y=5t$).

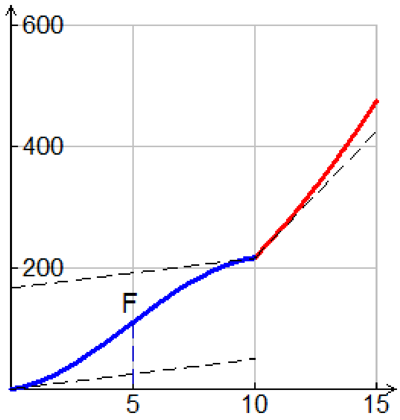
---

[1] **Proposizione (sul calcolo della derivata).** Sia $f:[a,b]\to R$ una funzione continua tale che i) f è derivabile in $]a,b[$ ii) f' ammette limite in a. Allora $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to a^+} f'(x)$

La dimostrazione è una immediata applicazione del teorema de L'Hospital applicato al rapporto di infinitesimi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

La proposizione è tratta dal volume Brandi-Salvadori, "Calculus in context: segmento per gli esami di stato", 2015, to appear.


2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
10
20
30


600
400
200
F
5
10
15

Problemi di simulazione della seconda prova di matematica

Esami di stato liceo scientifico 25 febbraio 2015

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta

Tempo massimo assegnato alla prove tre ore

Problema 2: **Un mappamondo prezioso**

Lavori in un laboratorio d'arte vetraria e il responsabile del museo civico della tua città ti chiede di progettare un espositore avente forma conica che possa contenere un prezioso e antico mappamondo. Il mappamondo ha raggio R e l'espositore deve essere ermeticamente chiuso, per impedire che il mappamondo prenda polvere.

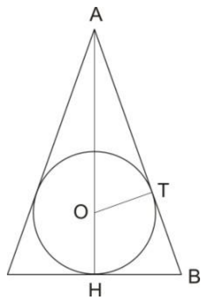
Il tuo collega Mario dice che, per costruire l'espositore, si potrebbe utilizzare il quarzo ialino ma, data la preziosità del materiale, per risparmiare è necessario determinarne le dimensioni ottimali. Inoltre per proteggere l'espositore dalla polvere decidete di ricoprirlo con una sottile pellicola trasparente di nuova generazione e piuttosto costosa.

1. Trascurando lo spessore dell'espositore e attraverso un'opportuna modellizzazione geometrica, determina l'altezza h e il raggio di base *r* dell'espositore affinché sia minima la sua superficie totale, allo scopo di utilizzare una quantità minima di pellicola[1].

[1] Ricorda che la superficie totale S di un cono è data dall'espressione: $S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

2. Fornisci una spiegazione adeguata e convincente del procedimento seguito, eventualmente anche con rappresentazioni grafiche.

Svolgimento.



Considerati i due triangoli HAB e OTA, essi sono simili in quanto rettangoli con un angolo (acuto) in comune, di conseguenza i lati corrispondenti sono in proporzione:

$$\overline{HB} : \overline{OT} = \overline{AH} : \overline{AT} = \overline{AB} : \overline{OA}$$

Essendo

$\overline{AH} = h$, $\overline{HB} = \overline{TB} = r$ (segmenti tangenti da un punto esterno alla circonferenza), $\overline{OT} = R$, $\overline{OH} = h - R$, $\overline{AT} = \overline{AB} - r$

risulta

$$r : R = h : \overline{AB} - r = \overline{AB} : h - R$$

Dalla prima e seconda relazione si deduce: $r : R = h : \overline{AB} - r \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \dfrac{Rh + r^2}{r}$

mentre dalla prima e terza si ha: $r : R = \overline{AB} : h - R \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \dfrac{r(h-R)}{R}$

in conclusione per confronto risulta $\dfrac{Rh + r^2}{r} = \dfrac{r(h-R)}{R} \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{2Rr^2}{r^2 - R^2}$.

Abbiamo così ottenuto una espressione che descrive l'altezza h in funzione di r e del parametro R.

Sostituendo tale espressione nella formula dalla superficie totale, si ottiene

$$S = S(r) = \frac{2\pi r^4}{r^2 - R^2} \quad \text{ove} \quad r > R > 0.$$

Per studiare i punti estremali della funzione, calcoliamo la sua derivata

$$S'(r) = 4\pi \frac{r^3}{\left(r^2 - R^2\right)^2}\left(r^2 - 2R^2\right)$$

e discutiamo il segno di S': $S'(r) > 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2R^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad r > R\sqrt{2}$

Possiamo quindi concludere che la funzione decresce in $\left[R, R\sqrt{2}\right]$ e cresce in $\left[R\sqrt{2}, +\infty\right[$, per cui $r = \sqrt{2}R$ è il punto di minimo.

Ora tu e Mario dovete scegliere la pellicola da sistemare sulla superficie esterna dell'espositore. La scelta va fatta tra due pellicole che hanno lo stesso costo unitario ma diverse proprietà: la prima ogni anno perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno, mentre la seconda ogni anno perde il 2% della resistenza all'usura iniziale.

3. Aiuta Mario nel capire quale pellicola convenga scegliere in funzione della durata, tenendo conto del fatto che entrambe hanno la stessa resistenza di partenza e che una pellicola va cambiata quando la sua resistenza all'usura risulta inferiore al 30% della sua resistenza di partenza.

Modelliamo separatamente la resistenza delle due pellicole, al variare del tempo.

Si tratta di un fenomeno di "decadimento" che è naturale[2] descrivere con un modello discreto (cfr. nota finale).

Denotiamo quindi con a_0 la resistenza iniziale della pellicola e con a_n quella dopo l'*n*-esimo anno.

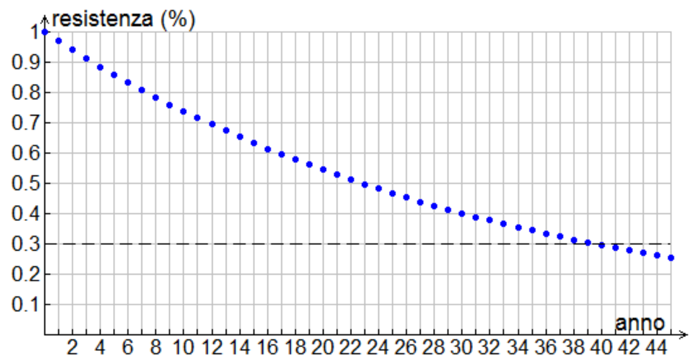
<u>Prima pellicola</u>: poiché "ogni anno perde il 3% della resistenza all'usura che possiede a inizio anno", il fenomeno è descritto dal processo iterativo

$$\begin{cases} a_0 & \textit{start} \\ a_{n+1} = a_n - 0{,}03a_n = 0{,}97a_n & n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Scopriamo così che il fenomeno evolve secondo una progressione geometrica di ragione $0{,}97$, che ammette la *formula chiusa*

$$a_n = (0{,}97)^n a_0 \quad n = 0,1,2,\ldots$$

[2] I modelli di decadimento (discreti e continui) sono trattati in Brandi-Salvadori, "Prima di iniziare. Conoscenze e competenze di base per l'Università", ed. Acquaplano, 2011, pp.312



Per stabilire in quale anno la pellicola deve essere sostituita, valutiamo quando la sua resistenza all'usura scende al di sotto del 30% di quella di partenza risolvendo la disequazione:

$$a_n = (0,97)^n a_0 < 0,3a_0 \quad \Rightarrow \quad (0,97)^n < 0,3 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\log 0,3}{\log 0,97} \cong 39,52 \text{ anni}$$

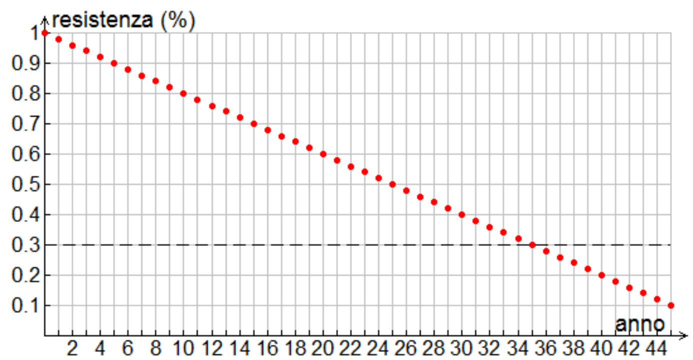
In altri termini la prima pellicola si mantiene efficiente per circa 40 anni.

Seconda pellicola: in questo caso " la pellicola ogni anno perde il 2% della resistenza all'usura iniziale ", quindi il fenomeno è descritto dal processo iterativo

$$\begin{cases} a_0 & start \\ a_{n+1} = a_n - 0,02\,a_0 & n = 0,1,2,... \end{cases}$$

Ora la successione delle iterate è un progressione aritmetica[3] di ragione $-0,02\,a_0$, che ammette la seguente formula chiusa

$$a_n = a_0 - 0,02\,na_0 = (1-0,02\,n)a_0 \qquad n = 0,1,2,...$$



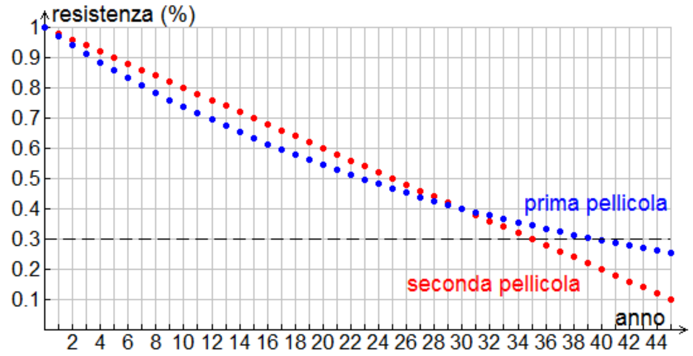
Per stabilire in quale anno la pellicola va cambiata, valutiamo quando la sua resistenza all'usura scende al di sotto del 30% di quella di partenza risolvendo la disequazione:

$$n_n = (1-0,02\,n)a_0 < 0,3a_0 \quad \Rightarrow \quad 1-0,02\,n < 0,3 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{0,7}{0,02} = 35 \text{ anni}$$

La seconda pellicola si mantiene pertanto efficiente per 35 anni.

Conclusione: La prima pellicola è preferibile alla seconda in quanto mantiene più a lungo le sue caratteristiche all'usura.

[3] I modelli lineari (discreti e continui) sono trattati in Brandi-Salvadori, "MATH MAPS. itinerari per le competenze", Ed. Univ. Bocconi, Pristem 2015, pp. 124.



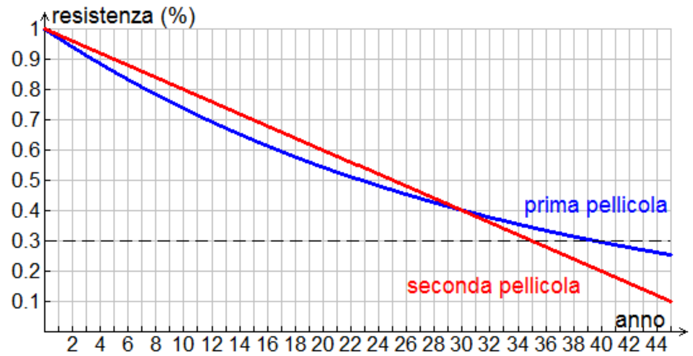
N.B. In entrambi i casi, il risultato è indipendente dalla resistenza iniziale della pellicola.
N.B. Per descrivere il fenomeno di perdita di resistenza della pellicola si poteva adottare un modello continuo, invece che discreto.
Denotato con R_0 è la resistenza iniziale ed assunta come variabile t il tempo (anni), si avrebbe

<u>prima pellicola</u>: poiché "ogni anno perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno", il residuo di resistenza è del 97%, quindi il fenomeno è descritto dalla funzione:

$$f(t) = R_0 \left(0{,}97\right)^t$$

<u>seconda pellicola</u>: " la pellicola ogni anno perde il 2% della resistenza all'usura iniziale ", quindi la resistenza residua è descritta dalla funzione:

$$g(t) = R_0 - 0{,}02\, R_0\, t$$



Indicatori di valutazione portati a conoscenza dello studente:

Comprendere

Analizzare la situazione problematica, rappresentare i dati, interpretarli e tradurli in linguaggio matematico.

Individuare

Mettere in campo strategie risolutive attraverso una modellizzazione del problema e individuare la strategia più adatta.

Sviluppare il processo risolutivo

Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari, con l’eventuale ausilio di strumenti informatici.

Argomentare

Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia applicata, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati